PENSARE IL CASO

IDEE PER INSEGNARE LA PROBABILITÀ E LA STATISTICA

SARA BORLENGO
MARTA LUCCHINI

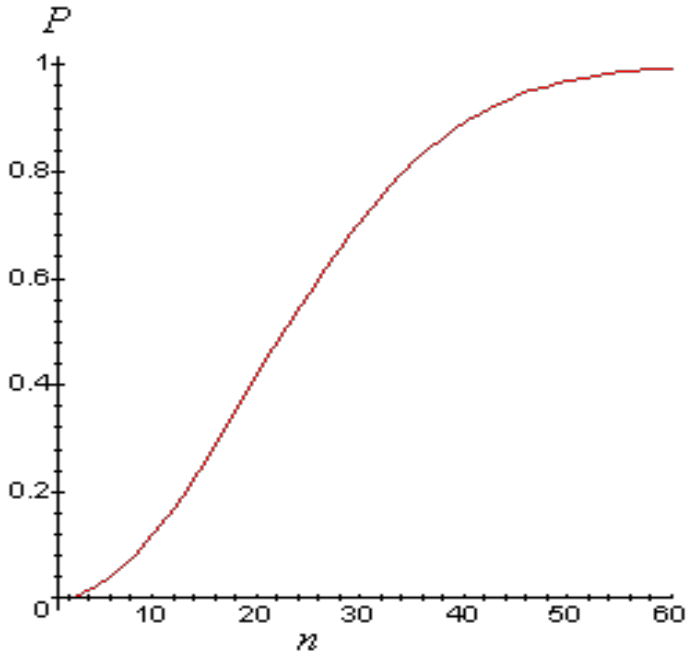
COINCIDENZE?

In quest’aula ci sono almeno due persone che compiono gli anni lo stesso giorno.

COINCIDENZE?

In quest’aula ci sono almeno due persone che compiono gli anni lo stesso giorno.

Probabile…?



PARTIRE DALLA STORIA

“*Un problema relativo a giochi d’azzardo, proposto da un uomo di mondo a un austero giansenista, è stata l’origine del calcolo delle probabilità.*”

S.D. Poisson

“*È notevole il fatto che una scienza iniziata con l’analisi dei giochi d’azzardo dovesse essere elevata al rango dei più importanti oggetti della conoscenza umana.*”

P.S. Laplace

PARTIRE DALLA STORIA

CONSIDERAZIONI SOPRA IL GIOCO DEI DADI

"*In un gioco da tavolo si accede ai punti bonus quando, lanciando un dado, si ottiene 6; in una variante dello stesso gioco vi si accede quando, lanciando due dadi, la somma dei punteggi è 6. In quale caso è più facile accedere ai punti bonus?*"

Gli ingredienti fondamentali di un modello probabilistico:

- un **esperimento**
- uno **spazio campionario** → Come descriverlo?
- **eventi** → Ancora gli insiemi?
- una misura di **probabilità** → Quale?

PARTIRE DALLA STORIA

CONSIDERAZIONI SOPRA IL GIOCO DEI DADI

Il calcolo combinatorio in pochi passi e senza delirio di terminologia.

- **Principio fondamentale:** se si eseguono k scelte e si hanno n_1 possibilità per la prima scelta, n_2 per la seconda, ..., n_k per la k-esima, allora la successione di tutte le scelte può essere compiuta in $n_1 n_2 ... n_k$ modi diversi.

PARTIRE DALLA STORIA

CONSIDERAZIONI SOPRA IL GIOCO DEI DADI

Il calcolo combinatorio in pochi passi e senza delirio di terminologia.

- Un'urna contiene *M* palline numerate da 1 a *M*. Se ne estraggono *n*. Come? Quanti esiti possibili?
  - Con reimmissione → M^n
  - Senza reimmissione – con ordine → $M \cdot (M-1) \cdot \ldots \cdot (M-n+1) = \frac{M!}{(M-n)!}$
  - Senza reimmissione – trascurando l'ordine → $\frac{M!}{(M-n)!n!} = \binom{M}{n}$

PARTIRE DALLA STORIA

CONSIDERAZIONI SOPRA IL GIOCO DEI DADI

Il calcolo combinatorio in pochi passi e senza delirio di terminologia.

- Un'urna contiene *M* palline numerate da 1 a *M*. Se ne estraggono *n*. Come? Quanti esiti possibili?
  - Con reimmissione → M^n
  - Senza reimmissione – con ordine → $M \cdot (M-1) \cdot \ldots \cdot (M-n+1) = \frac{M!}{(M-n)!}$
  - Senza reimmissione – trascurando l'ordine → $\frac{M!}{(M-n)!n!} = \binom{M}{n}$

$$P(compleanni) = 1 - \frac{365 \cdot (365-1) \cdot (365-2) \cdot \ldots \cdot (365-n+1)}{365^n}$$

PARTIRE DALLA STORIA, IN LABORATORIO

1654: le scommesse del Cavaliere de Méré nel carteggio tra Pascal e Fermat

- Ottenere almeno un 6 lanciando 4 volte un dado

$$1-\frac{5^4}{6^4}\simeq 0.518$$

- Ottenere almeno una coppia di 6 lanciando 24 volte due dadi

$$1-\frac{35^{24}}{36^{24}}\simeq 0.491$$

PARTIRE DALLA STORIA, IN LABORATORIO

APPROCCIO CLASSICO VS APPROCCIO FREQUENTISTA

CASUALE.TRA(1,6)

CONTA.SE(B2:E2,6)

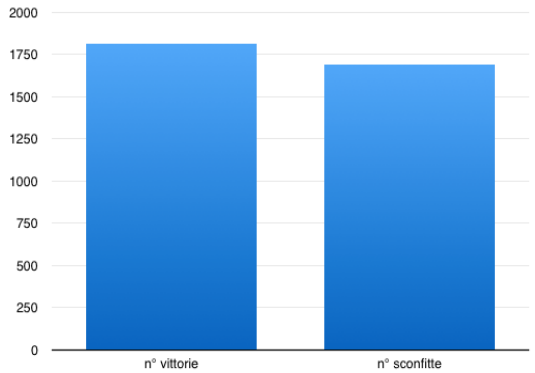
SE(F2≥1;1;0)

H2:A2

H2+G3

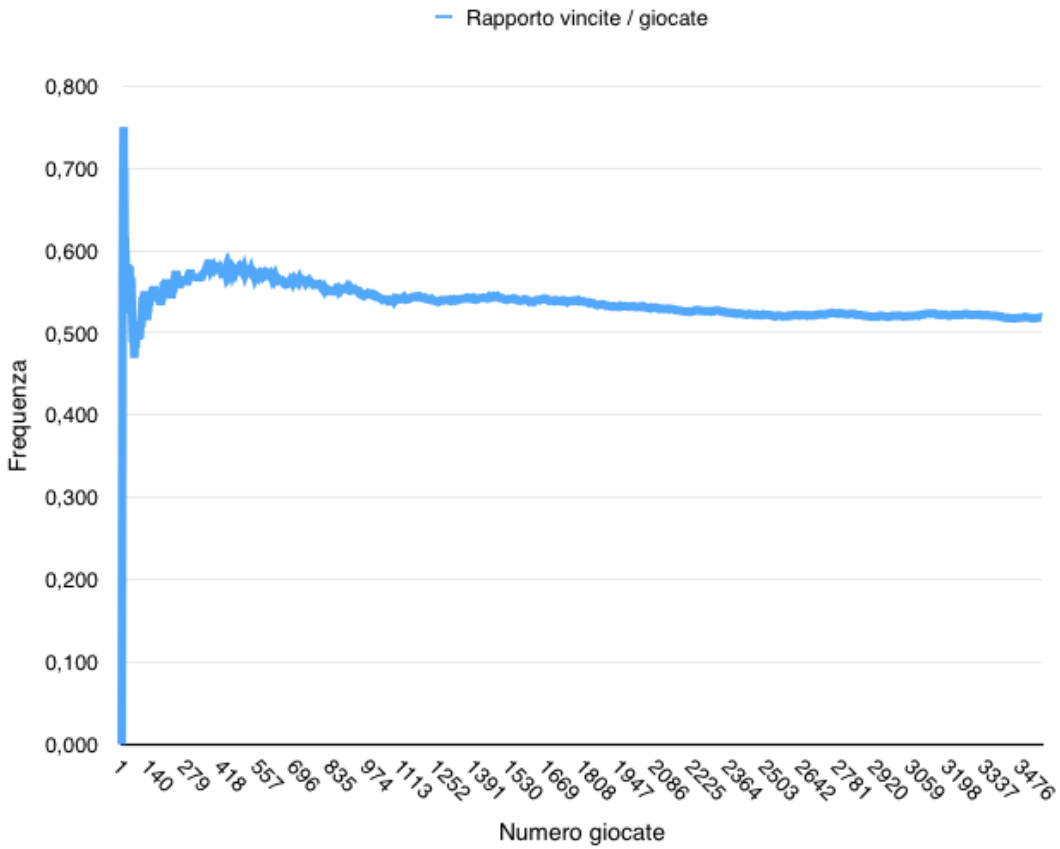
Prima scommessa del cavaliere De Méré

Giocata	Lancio 1	Lancio 2	Lancio 3	Lancio 4	Numero di 6	Vittoria 1 - Sconfitta 0	Tot vittorie	Rapporto vincite / giocate
1	3	4	4	4	0	0	0	0,000
2	2	6	3	1	1	1	1	0,500
3	2	3	5	5	0	0	1	0,333
4	4	5	5	4	0	0	1	0,250
5	2	3	4	2	0	0	1	0,200
6	2	2	5	2	0	0	1	0,167
7	2	3	4	6	1	1	2	0,286
8	3	4	6	5	1	1	3	0,375
9	1	3	6	1	1	1	4	0,444
10	2	1	3	6	1	1	5	0,500



PARTIRE DALLA STORIA, IN LABORATORIO

APPROCCIO CLASSICO VS APPROCCIO FREQUENTISTA



Vinco la scommessa con p=0,518

PARTIRE DALLA STORIA, IN LABORATORIO

APPROCCIO CLASSICO VS APPROCCIO FREQUENTISTA

- Approccio frequentista (a posteriori) in accordo con l'approccio classico (a priori)
- Legge dei grandi numeri (J. Bernoulli) → verticalità
- In mancanza di ipotesi classiche, fornisce una stima della probabilità
- Probabilità come valore predittivo

Si lancia 300 volte un dado non truccato a 6 facce. Quante volte ci si aspetta di ottenere un numero maggiore di 4?

A. ☐ circa 100 volte
B. ☐ circa 50 volte
C. ☐ circa 30 volte
D. ☐ circa 150 volte

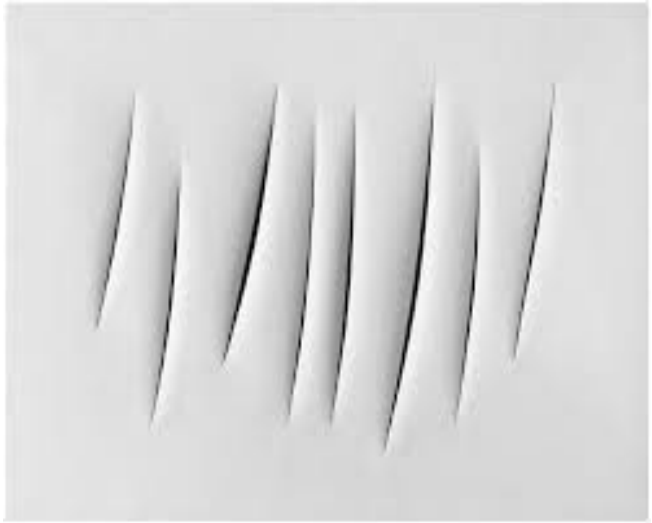
Invalsi, Quesito D25, a.s. 2014/2015

ESSENZIALITÀ: LA DEFINIZIONE ASSIOMATICA

1933: definizione assiomatica di Kolmogorov

- $P(E) \geq 0$
- $P(\Omega) = 1$
- Se A e B sono due eventi incompatibili, allora

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



ESSENZIALITÀ E CONFRONTI
UN'ALTRA DEFINIZIONE ASSIOMATICA

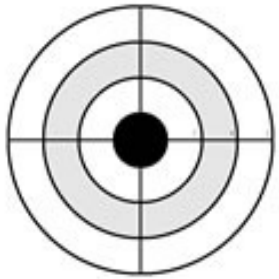
Che cosa sono i numeri naturali?

Assiomi di Peano:

- Esiste un numero naturale, 0.
- Ogni numero naturale ha un numero naturale successore.
- Numeri naturali diversi hanno successori diversi.
- 0 non è successore di nessun numero naturale.
- Ogni sottoinsieme di numeri naturali che contenga lo 0 e il successore di ogni proprio elemento coincide con l'intero insieme dei numeri naturali.

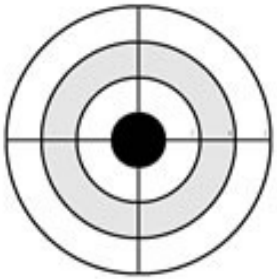
ESSENZIALITÀ
UN ESEMPIO

“Un tizio gioca a freccette contro un bersaglio circolare. Possiamo ritenere che certamente la freccetta colpirà un punto del bersaglio. Come valutare la probabilità che il tiro colpisca un punto della regione nera al centro?”



ESSENZIALITÀ
UN ESEMPIO

"Un tizio gioca a freccette contro un bersaglio circolare. Possiamo ritenere che certamente la freccetta colpirà un punto del bersaglio. Come valutare la probabilità che il tiro colpisca un punto della regione nera al centro?"



Assioma 3: se A_1,A_2... sono una successione di eventi a due a due incompatibili, allora

$$P(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$$

MATEMATICA E REALTÀ: GIOCARE IL CASO

Quanto è difficile fare 6 al Superenalotto?

- Una questione sociale
- Confronti pratici: sarebbe più facile ricevere una telefonata da Barack Obama…
- Numeri ritardatari e “belle sestine”

NUMERI RITARDATARI

A Cagliari il numero 76 non esce da 145 estrazioni.

GUARDA TUTTI I RITARDATARI

NUMERI FREQUENTI

A Firenze il numero 19 è uscito in 18 estrazioni.

GUARDA TUTTI I FREQUENTI

MATEMATICA E REALTÀ: GIOCARE IL CASO

Perché *il banco vince sempre*?

- Un gioco è **equo** se la posta equivale al prodotto tra il guadagno lordo e la probabilità di vittoria

MATEMATICA E REALTÀ: GIOCARE IL CASO

Perché *il banco vince sempre*?

- Un gioco è **equo** se la posta equivale al prodotto tra il guadagno lordo e la probabilità di vittoria

- Gioco della roulette:
  - Se punto su un numero, vinco con probabilità 1 su 37, ma ottengo 36 volte la posta
  - la differenza è 1 su 37: quel 2,7% è il margine di guadagno del banco

MATEMATICA E REALTÀ: GIOCARE IL CASO

Perché *il banco vince sempre*?

- Un gioco è **equo** se la posta equivale al prodotto tra il guadagno lordo e la probabilità di vittoria

- Gioco della roulette:
  - Se punto su un numero, vinco con probabilità 1 su 37, ma ottengo 36 volte la posta
  - la differenza è 1 su 37: quel 2,7% è il margine di guadagno del banco

- Gioco del Lotto (la *tassa dell'imbecillità*, De Finetti):
  - il banco (lo Stato stesso) ci guadagna il 37,6%

MATEMATICA E REALTÀ: GIOCARE IL CASO

Perché *il banco vince sempre*?

- Verticalità: un gioco è equo se il **valore atteso** della variabile aleatoria ”guadagno” è nullo
- Roulette: il valore atteso del guadagno (indipendentemente dal tipo di puntata) è

$$E[G_{roulette}] = -1 \cdot \frac{36}{37} + (36-1) \cdot \frac{1}{37} = -\frac{1}{37}$$

- Scommesse online:
  - Se il gioco fosse equo, $p_i q_i = 1$
  - Accade invece che $p_i q_i = \text{costante} < 1$
  - $E[G_{scommesse}] = -1 \cdot (1-p_i) + (q_i - 1) \cdot p_i = p_i q_i - 1 < 0$

NUMERO 50!

ALICE&BOB
50
Sara Borlengo | Marta Lucchini
PENSARE IL CASO
IDEE PER INSEGNARE LA PROBABILITÀ E LA STATISTICA NEL PRIMO BIENNIO DELLE SUPERIORI
• FARE STATISTICA DESCRITTIVA
• RAGIONI MODERNE E ANTICHE
• CHE COS'È LA PROBABILITÀ
• PROVE INVALSI
Egea
CENTRO PRISTEM
UNIVERSITÀ BOCCONI